

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ 22- 24 mai 2009**

**Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului**

**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**  
**CLASA a X-a**

**I. a) Obține**

$$\begin{cases} a+b+1=0 \\ 2a+b+4=0 \end{cases} \Rightarrow a=-3 \text{ și } b=2 \dots\dots\dots 2p$$

b) Ecuația devine:  $z^2 - 3|z| + 2 = 0$ . Fie  $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$  cu  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Obținem  $x^2 - y^2 - 3\sqrt{x^2 + y^2} + 2 + 2ixy = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 - 3\sqrt{x^2 + y^2} + 2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cazul I: } y=0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow z_1=1, z_2=2 \\ x < 0 \Rightarrow z_3=-1, z_4=-2 \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Cazul II: } x=0 \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \Rightarrow z_5 = \frac{\sqrt{17}-3}{2}i \\ y < 0 \Rightarrow z_6 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}i \end{cases} \dots\dots\dots 2p$$

*Total 7 puncte*

$$\text{II. a) } x=y=1 \Rightarrow f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0 \dots\dots\dots 1p$$

$$y=\frac{1}{x} \Rightarrow 0=f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{b) } y=x \Rightarrow f(x^2)=2 \cdot f(x) \dots\dots\dots 1p$$

Demonstrația prin inducție matematică  $\dots\dots\dots 2p$

$$\text{c) Fie } m=-n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x^m)=f\left(\frac{1}{x^n}\right)=-f(x^n)=-n \cdot f(x)=m \cdot f(x) \dots\dots\dots 2p$$

*Total 7 puncte*

$$\text{III. a) } d_1 \cap d_2 = \{M_1\}, M_1(\alpha, \alpha+1) \notin d_3$$

sau arată că sistemul format de cele trei ecuații este incompatibil..  $\dots\dots\dots 1p$

$$\text{b) Din } \frac{\alpha}{1} \neq \frac{\alpha-1}{1} \Rightarrow d_1 \text{ nu este paralelă cu } d_2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } \frac{\alpha-2}{1} \neq \frac{\alpha-3}{1} \Rightarrow d_1 \text{ nu este paralelă cu } d_3, \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Din } \frac{\alpha-2}{\alpha} \neq \frac{\alpha-3}{\alpha-1} \Rightarrow d_2 \text{ nu este paralelă cu } d_3 \dots\dots\dots 1p$$

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ**  
**"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA NAȚIONALĂ 22- 24 mai 2009**

**Filiera tehnologică: profil servicii, profil resurse naturale și protecția mediului**

c)  $d_1 \cap d_3 = \{M_2\}, M_2(\alpha - 2, \alpha - 1)$  și  $d_3 \cap d_2 = \{M_3\}, M_3(1, 1)$  .....1p

Punctele  $M_1, M_2 \in d_1$  (fixă), și  $M_1M_2 = \text{const.}$  .....1p

$A_{M_1M_2M_3} = \frac{M_1M_2 \cdot d(M_3, d_1)}{2} = \text{constantă} (d(M_3, d_1) = \text{const.})$  .....1p

*Total 7 puncte*

**IV.** a) Rezultă  $n + 1$  bucăți după  $n$  tăieturi .....1p

b) Numărul total al vârfurilor crește cu:

- 2 (tăietura prin două vârfuri)
- 3 (tăietura printr-un vârf și un punct de pe o latură)
- 4 (tăietura prin două puncte de pe două laturi).....2p

c) Numărul maxim de vârfuri  $= 4 + 4n$  .....1p

d) După  $N$  tăieturi se obțin și 10 poligoane cu 15 laturi  $\Rightarrow$  numărul total de vârfuri este cel puțin  $10 \cdot 15 + (N + 1 - 10) \cdot 3$  .....1p

Din  $10 \cdot 15 + (N - 9) \cdot 3 \leq 4 + 4N \Rightarrow N \geq 119$ , necesare minimum 119 tăieturi.....1p

Indică un mod de obținere .....1p

(Tăiem pătratul în 10 dreptunghiuri făcând 9 tăieturi. Apoi fiecare dreptunghi, prin 11 tăieturi îl transformăm în poligon cu 15 laturi, tăind din colțuri triunghiuri-110 tăieturi)

*Total 7 puncte*